CHAPITRE 3

APPLICATION TRINOME

DU SECOND DEGRE

1 Racine carrée

Exercices

1 *L'aire d'un pré est* 2'500 m^2.

a) *Quelle est la longueur d'un côté si le pré est carré?*

b) *Si le pré est rectangulaire et la longueur est le quadruple de la largeur, trouver la longueur.*

c) *Si le pré est triangulaire et la base est le double de sa hauteur, trouver la hauteur.*

d) *Si le pré est rectangulaire et la longueur est le double de sa largeur, trouver ses dimensions.*

2 *Résoudre dans* $\mathbb{R}_+$

1) $x^2 = 4$	2) $x^2 - 36 = 0$	3) $3x^2 = 27$
4) $3x^2 - 75 = 0$	5) $(x - 1)^2 = 16$	6) $x^2 + 4x + 4 = 0$

3 *Si* f *est une application de* $\mathbf{R}_+$ *vers* $\mathbf{R}_+$ *telle que* $f(x) = x^2$, *démontrer que* f *est injective.*
L'application g *de* $\mathbf{R}$ *vers* $\mathbf{R}_+$ *telle que* $g(x) = x^2$ *est-elle injective?*
L'application h *de* $\mathbf{R}_+$ *vers* $\mathbf{R}$ *telle que* $h(x) = x^2$ *est-elle injective, surjective?*

On a prouvé dans l'exercice précédent que l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto f(x) = x^2 = y$

est une injection. On admettra sans démonstration qu'elle est aussi surjective. On peut alors déduire qu'elle est bijective et qu'elle admet par conséquent une bijection réciproque

$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$y \mapsto f^{-1}(y) = x$ et $x^2 = y$

ou

$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto f^{-1}(x) = y$ et $y^2 = x$

Cette application réciproque se nomme **application racine carrée** et s'écrit

$\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \sqrt{x} = y$ avec $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x$

Définition 1 Si x est un réel positif, on appelle **racine carrée de** x le nombre réel positif y tel que $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x$.

Exercice 4 *Pour montrer que* $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

a) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $f(x) = x^2$, *démontrer que* $a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

b) Démontrer que $(\sqrt{x})^2 = x$.

c) Démontrer que pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x^2}$

on a $\sqrt{x^2} = |x|$.

THEOREME 1	Pour $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+$,	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et $b \neq 0$

Exercices

5 *Simplifier les écritures suivantes en ne laissant pas de racine aux dénominateurs, le cas échéant.*

1) $\sqrt{16}$ 2) $\sqrt{8}$ 3) $\sqrt{(-5)^2}$ 4) $\sqrt{3^2 + 4^2}$

5) $\sqrt{15^2 - 12^2}$ 6) $(2\sqrt{3})^2$ 7) $(3\sqrt{7})^2$ 8) $\sqrt{200}$

9) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 10) $\sqrt{\frac{16}{8}}$ 11) $\sqrt{\frac{9}{8}}$ 12) $\sqrt{128}$

13) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ 14) $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$ 15) $\sqrt{2x^2 + 16x + 32}$ 16) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$

6 *Effectuer les opérations et simplifier.*

1) $\sqrt{27} - 3\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{54} - \sqrt{24}$ 3) $\sqrt{32} - \sqrt{2} - \sqrt{18}$

4) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 11\sqrt{3}$ 5) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$ 6) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}$

7) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{33}$ 8) $\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}$ 9) $\sqrt{6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3\sqrt{2}}$

10) $\sqrt{5}\,(\sqrt{20} - \sqrt{5})$ 11) $\sqrt{3}\,(\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{27})$

12) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 13) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$ 14) $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

7 *Chasser les racines du dénominateur (rendre le dénominateur rationnel) en multipliant numérateur et dénominateur par une quantité convenable.*

1) $\sqrt{\frac{2}{8}}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

5) $\frac{2}{\sqrt{3} + 1}$ 6) $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ 7) $\frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ 8) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

9) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ 10) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ 11) $\frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{3} - 2}$ 12) $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{8} - \sqrt{2}}$

8 *Démontrer que* $(\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ et } a^2 \leq b^2) \Leftrightarrow (0 \leq a \leq b)$

9 *Donner un encadrement pour* $\sqrt{3}$, *pour* $\sqrt{5}$, *pour* $\sqrt{6}$ *en se servant de l'exemple suivant.*

Exemple d'encadrements successifs du nombre $\sqrt{2}$. *On utilise* $x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = 2$.

a)	$1 \leq x \leq 2$	$\Leftrightarrow$	$1 \leq x^2 \leq 4$		
b)	$1{,}3 \leq x \leq 1{,}7$	$\Leftrightarrow$	$1{,}69 \leq x^2 \leq 2{,}89$		
	$1{,}4 \leq x \leq 1{,}6$	$\Leftrightarrow$	$1{,}96 \leq x^2 \leq 2{,}56$		
	$1{,}4 \leq x \leq 1{,}5$	$\Leftrightarrow$	$1{,}96 \leq x^2 \leq 2{,}25$	et	$x \cong 1{,}4$
c)	$1{,}41 \leq x \leq 1{,}42$	$\Leftrightarrow$	$1{,}9881 \leq x^2 \leq 2{,}0164$	et	$x \cong 1{,}41$
d)	$1{,}412 \leq x \leq 1{,}415$	$\Leftrightarrow$	$1{,}993744 \leq x^2 \leq 2{,}002225$	et	$x \cong 1{,}412$
	$1{,}414 \leq x \leq 1{,}415$	$\Leftrightarrow$	$1{,}999396 \leq x^2 \leq 2{,}002225$	et	$x \cong 1{,}414$
e)	$1{,}4141 \leq x \leq 1{,}4145$	$\Leftrightarrow$	$1{,}99967881 \leq x^2 \leq 2{,}00081025$	et	$x \cong 1{,}4141$
	$1{,}4142 \leq x \leq 1{,}4143$	$\Leftrightarrow$	$1{,}99996164 \leq x^2 \leq 2{,}00024449$	et	$x \cong 1{,}4142$
f)	$1{,}41421 \leq x \leq 1{,}41422$	$\Leftrightarrow$	$1{,}99999899 \leq x^2 \leq 2{,}00001820$	et	$x \cong 1{,}41421$

On calcule de proche en proche avec $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$.
Avec $13^2 = 169$, on a $14^2 = (13+1)^2 = 169+26+1 = 196$ et $15^2 = (14+1)^2 = 196+28+1 = 225$.

***Exercice** 10*

Si l'on a $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ *qu'est-ce que* $[10^{-m-1}; 10^{-m}]$, $[\frac{1}{2^{m+1}}; \frac{1}{2^m}]$, $[5^{-m}; 5^{-m+1}]$?

Des **intervalles** sont dits **emboîtés** si $\forall\, n \in \mathbf{N}\ \ [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$. Le nombre $(b_n - a_n)$ se nomme **diamètre** de l'intervalle.

Pour construire un nombre réel dont le carré est donné, on utilise un axiome (le dernier après les 15 axiomes permettant de construire le corps commutatif totalement ordonné $(\mathbf{R}, +, \cdot, \geq)$).

Axiome des intervalles emboîtés pour R

L'intersection d'une infinité d'intervalles emboîtés dont les diamètres sont infiniment petits est un singleton.

<u>Remarques</u>

1 " infiniment petits" s'écrit $\forall\, p \in \mathbf{N}\ \ \exists\, n \in \mathbf{N}\ \ (m > n \ \Rightarrow\ b_m - a_m \leq 10^{-p})$.

Quelle que soit la petitesse 10^{-p} souhaitée de l'intervalle, on peut dire à partir de quel intervalle $[a_n, b_n]$ tous les intervalles emboîtés $[a_m, b_m]$ suivants ($m > n$) ont un diamètre inférieur à 10^{-p}.

Par exemple si $p = 8$, alors les diamètre des intervalles $[a_m, b_m]$ sont inférieurs ou égaux à $10^{-8} = 0{,}00000001$.

2 Si l'on envisage les emboîtements successifs suivants
$[1{,}99; 2] \subset [1{,}9; 2]$, $[1{,}999; 2] \subset [1{,}99; 2]$, $[1{,}9999; 2] \subset [1{,}999; 2]$, etc...,
alors $2 - 1{,}99 = 0{,}01 = 10^{-2}$, $2 - 1{,}999 = 0{,}001 = 10^{-3}$, $2 - 1{,}9999 = 0{,}0001 = 10^{-4}$, etc...,
et les diamètres de ces intervalles successifs deviennent "infiniment petits". L'axiome dit que leur intersection est un singleton dont l'unique élément s'écrit 2 ou $1,\overline{9}$.

3 C'est l'axiome des intervalles emboîtés qui permet de démontrer que f est surjective si

$$\begin{array}{rl} f: \mathbf{R}_+ & \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto f(x) = x^2 \end{array}$$

Exercice 11

a) Quels sont les diamètres des intervalles $[-5;-3]$, $[-3;12]$, $[3{,}6;5{,}32]$, $[10^{-6};10^{-5}]$, $[-\frac{3}{10};\frac{5}{3}]$, $[\sqrt{2};\sqrt{3}]$, $[1+\sqrt{2};\,2+\sqrt{3}]$?

b) Donner deux écritures décimales pour x *si* $x \in \{1;\,3;\,1{,}5;\,10\}$.
A-t-on $5{,}88 = 5{,}8\overline{8}$; $62{,}33 = 62{,}32\overline{9}$?

2 Racines et signe du trinôme

Exercices

12 *La trajectoire du ballon dégagé par un gardien de football est donnée dans un repère orthonormé par des points* $M(x, f(x))$ *avec* $f(x) = -\frac{x^2}{32} + x$.

a) Représenter graphiquement f *(choisir 1 carré par mètre)*
A quelle distance du gardien le ballon retombe-t-il? Quelle hauteur atteint-il?

b) Si $f(x) = -\frac{x^2}{9} + 4x$, *le ballon tombera-t-il plus loin?*

c) Si la trajectoire est une parabole décrite par $f(x) = ax^2 + bx + c$, *comment choisir* c *si le gardien se trouve au point* $M(0, 0)$?

d) Si la trajectoire est donnée par $f(x) = ax^2 + bx$, *calculer* a *et* b *si le ballon passe par les points* $M(12; 4)$ *et* $N(24; 0)$.

13 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$.

1)	$x^2 - 9x = 0$	2)	$x^2 + 1 = -2x$	3)	$4x^2 - 12x = -9$
4)	$-x^2 - x = \frac{1}{4}$	5)	$17x = 34x^2$	6)	$x^2 + 3 = 0$
7)	$(2x+1)(x-2) = 0$	8)	$x^2 + x - 6 = 0$	9)	$(x+1)^2 - 9 = 0$
10)	$(x^2 - 8x + 16) - 1 = 0$	11)	$(x^2 + 6x + 9) - 4 = 0$	12)	$x^2 + 2x + 2 = 0$
13)	$x^2 + 2x - 3 = 0$	14)	$9x^2 + 6x - 24 = 0$	15)	$\frac{1}{4}x^2 + x - 8 = 0$
16)	$x^2 = a^2$	17)	$x^2 - 4b^2 = 0$	18)	$x^2 + 8c^2 = 0$

14 *A-t-on* $A \in (BC)$ *si* $A(0, f(0))$, $B(1, f(1))$, $C(-1, f(-1))$ *dans les cas suivants?*

1) $f(x) = x^2$	2) $f(x) = x^2 - 1$	3) $f(x) = x^2 + 1$
4) $f(x) = -x^2 + 2$	5) $f(x) = 2x^2$	6) $f(x) = 3x^2 - 1$
7) $f(x) = 3x - 1$	8) $f(x) = x^2 + x$	9) $f(x) = \lvert x \rvert$

Trois exemples pour trouver les racines des applications trinômes.

a) $f(x) = 2x^2 + 20x + 50 = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x+5)^2$

alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

b) $f(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3[(x^2 - 2x + 1) - 4] = 3[(x-1)^2 - 4]$

$= 3[(x-1) + 2][(x-1) - 2] = 3(x+1)(x-3)$

alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 3\}$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x + 9) + 1 = (x+3)^2 + 1$ (somme de deux positifs)

alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Exercices

15 *Trouver les racines des applications trinômes.*

1) $f(x) = 9x^2 + 6x - 2$	2) $f(x) = x^2 + 12x + 36$	3) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$
4) $f(x) = 4x^2 + 12x + 6$	5) $f(x) = x^2 - 10x + 26$	6) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$
7) $f(x) = x^2 - 5x + 10$	8) $f(x) = 7x^2 - 14x - 56$	9) $f(x) = 7x^2 - 3$

16 *Comment choisir* m *si l'on veut une et une seule racine pour l'application trinôme* f ? *(Utiliser une formule remarquable)*

1) $f(x) = x^2 + 2x + m$	2) $f(x) = x^2 - mx + 81$	3) $f(x) = mx^2 - 12x + 9$
4) $f(x) = x^2 + 2mx + m^2$	5) $f(x) = x^2 - m^2$	6) $f(x) = x^2 + 4x + 8m$

Racines et signe du trinôme

Pour une application trinôme f quelconque, avec $a \neq 0$, on a

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Racines du trinôme

Pour chercher les racines de l'application f , on distingue trois cas suivant le choix de $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant** du trinôme.

a) Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - 0] = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

et l'on a une et une seule racine (on dit aussi "racine double").

b) Si $\Delta > 0$ ou $b^2 - 4ac > 0$, alors $b^2 - 4ac = (\sqrt{b^2 - 4ac})^2$

$$\text{et } f(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})$$

$$= a(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a})$$

$$\text{et } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

et l'on a deux racines distinctes.

c) Si $\Delta < 0$ alors $-(b^2 - 4ac) > 0$ et $f(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + (-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})\right] = 0$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$

car on a la somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif.

THEOREME 2 Pour l'application f, avec $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \neq 0$

a) si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

b) si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$

c) si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Signe du trinôme

Pour déterminer le signe du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ on distingue aussi trois cas.

a) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$ et le signe du trinôme est celui de a.

b) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

on obtient **$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$**

dans le cas $x_1 < x_2$, le tableau des signes de $(x - x_1)(x - x_2)$ est

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	-	0	+		+
$x - x_2$	-		-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	0	+

alors pour $a > 0$ on a $f(x) > 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$

et pour $a < 0$ on a $f(x) < 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$

En résumé, le signe du trinôme est celui du coefficient a exactement pour les x à l'extérieur des racines.

c) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors $\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + (- \frac{b^2 - 4ac}{4a^2})\right] > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et le signe du trinôme est toujours celui de a.

THEOREME 3 Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ est celui de a pour tout x sauf si x est compris entre les racines, si elles existent.

Exercices

17 Calculer les racines des applications trinômes.

1) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ 2) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$ 3) $f(x) = 6x^2 - x - 2$

4) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ 5) $f(x) = x^2 - 6$ 6) $f(x) = x^2 - 5x - 1$

7) $f(x) = x^2+3x+3$ 8) $f(x) = x^2+7x-6$ 9) $f(x) = \frac{1}{2}x^2+3x-1$

10) $f(x) = \frac{1}{4}x^2-7x$ 11) $f(x) = 5x^2-7$ 12) $f(x) = 10x^2+5x-1$

13) $f(x) = -3x^2+x+6$ 14) $f(x) = -2x^2-5x+3$ 15) $f(x) = -4x^2-5x-4$

16) $f(x) = x^2+3|x|-1$ 17) $f(x) = x^2-|x+3|$ 18) $f(x) = 3x^2-2|x+1|$

18 *Factoriser, si possible, les trinômes et trouver* x *si* $f(x) \geq 0$.

1) $f(x) = x^2+4x-12$ 2) $f(x) = 2x^2-5x-12$ 3) $f(x) = 15x^2+x+1$

4) $f(x) = -8x^2+x-3$ 5) $f(x) = 5x^2-16$ 6) $f(x) = 4x^2+18x$

7) $f(x) = 3x^2+5x-1$ 8) $f(x) = -7x^2+x+1$ 9) $f(x) = -2x^2+5x+3$

19 *Déterminer* x *si* $f(x) < 0$.

1) $f(x) = -36x^2$ 2) $f(x) = -81x^2-9$ 3) $f(x) = 25x^2-15x$

4) $f(x) = 6x^2-x-1$ 5) $f(x) = x^2-1$ 6) $f(x) = -x^2+x+1$

7) $f(x) = -x^2+x-1$ 8) $f(x) = x^2-4x-3$ 9) $f(x) = -x^2+2x-1$

20 *Trouver* x *si* $f(x) = 3$.

1) $f(x) = |x^2-x|$ 2) $f(x) = 2x^2-|x+1|$ 3) $f(x) = 3x^2-|x|$

4) $f(x) = |5x^2-75|+x$ 5) $f(x) = |x^2-6x+9|$ 6) $f(x) = |x^2-x-2|$

7) $f(x) = |x|(x+2)$ 8) $f(x) = x|x-3|$ 9) $f(x) = |x| \cdot |x+4|$

21 *En utilisant* $\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow (b \neq 0$ et $ab \geq 0)$ *(le produit et le quotient ont le même signe), résoudre les inéquations.*

1) $\frac{2x+1}{x-2} \geq 0$ 2) $\frac{1-3x}{4-8x} \geq 0$ 3) $\frac{5x-2}{3x+1} < 0$

4) $\frac{8x-1}{3x^2+1} \leq 0$ 5) $\frac{2}{x+1} - 3 > 0$ 6) $\frac{3-x}{12+3x} \leq 2$

3	**Variation et représentation graphique de la fonction trinôme**

Exercices

22 *Si* $f(x) = x^2$*, montrer pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que*

a) f *est une fonction paire;*

b) f *est croissante sur* $[0, +\infty[$ *;*

c) f *admet un minimum pour* $x = 0$*, ce minimum est* 0*.*

23 *Etudier* f *en suivant le modèle précédent.*

1) $f(x) = x^2+1$	2) $f(x) = (x-1)^2$	3) $f(x) = 4x^2-1$
4) $f(x) = -x^2+2$	5) $f(x) = 2x^2-\lvert x\rvert$	6) $f(x) = \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}$

24 *Si* $f(x) = (x-2)^2$*, montrer que* f *admet un minimum pour* $x = 2$ *et que, pour* $x_1 = 2-a$ *et* $x_2 = 2+a$*, les nombres* $f(x_1)$ *et* $f(x_2)$ *sont égaux. En déduire que la courbe* Γ_f *admet un axe de symétrie vertical.*

<u>Etude de la variation de la fonction trinôme</u>

On a $$f(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Alors $$x_1 < x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \{x_1 ; x_2\} \subset]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et } (x_1 + \frac{b}{2a})^2 > (x_2 + \frac{b}{2a})^2 \\ \text{ou} \\ \{x_1 ; x_2\} \subset [-\frac{b}{2a} ; +\infty[\text{ et } (x_1 + \frac{b}{2a})^2 < (x_2 + \frac{b}{2a})^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \{x_1 ; x_2\} \subset]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et } (x_1 + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} > (x_2 + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ \text{ou} \\ \{x_1 ; x_2\} \subset [-\frac{b}{2a} ; +\infty[\text{ et } (x_1 + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} < (x_2 + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>0 \text{ et } \begin{cases} \{x_1;x_2\} \subset \left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right] \text{ et } a\left[\left(x_1+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] > a\left[\left(x_2+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ \text{ou} \\ \{x_1;x_2\} \subset \left]-\dfrac{b}{2a};+\infty\right] \text{ et } a\left[\left(x_1+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] < a\left[\left(x_2+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \end{cases} \\ \text{ou} \\ a<0 \text{ et } \begin{cases} \{x_1;x_2\} \subset \left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right] \text{ et } a\left[\left(x_1+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] < a\left[\left(x_2+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ \text{ou} \\ \{x_1;x_2\} \subset \left]-\dfrac{b}{2a};+\infty\right] \text{ et } a\left[\left(x_1+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] > a\left[\left(x_2+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>0 \text{ et } \begin{cases} \{x_1;x_2\} \subset \left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right] \text{ et } f(x_1) > f(x_2) \text{ et } f \text{ est décroissante sur } \left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right] \\ \text{ou} \\ \{x_1;x_2\} \subset \left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[\text{ et } f(x_1) < f(x_2) \text{ et } f \text{ est croissante sur } \left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[\end{cases} \\ \text{ou} \\ a<0 \text{ et } \begin{cases} \{x_1;x_2\} \subset \left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right] \text{ et } f(x_1) < f(x_2) \text{ et } f \text{ est croissante sur } \left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right] \\ \text{ou} \\ \{x_1;x_2\} \subset \left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[\text{ et } f(x_1) > f(x_2) \text{ et } f \text{ est décroissante sur } \left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[\end{cases} \end{cases}$$

THEOREME 4 Pour la fonction trinôme f, avec $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \neq 0$

si $a > 0$, la fonction admet un minimum $f(-\frac{b}{2a})$,

si $a < 0$, la fonction admet un maximum $f(-\frac{b}{2a})$.

Exercices

25 *Déterminer la variation de l'application* f. *(Ou étudier la monotonie de* f *)*

1) $f(x) = x^2 + x - 2$ 2) $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$ 3) $f(x) = -2x^2 + 8$

4) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ 5) $f(x) = x^2 + 2x + c$ 6) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$

7) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ 8) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 9) $f(x) = 4x^2 + x + 1$

26 *Représenter graphiquement* f.

1) $f(x) = |x^2-4|$ 2) $f(x) = x^2-|2x|$ 3) $f(x) = |(x+1)(x-3)|$

4) $f(x) = x^2+|x^2-x|$ 5) $f(x) = (2-x)|x+4|$ 6) $f(x) = |x^2+1|-x$

7) $f(x) = |9-x^2|+1$ 8) $f(x) = 2x^2-|x^2+2x+1|$ 9) $f(x) = |x^2-1|-(x-1)^2$

27 *Déterminer les coefficients* a, b, c *de la fonction* f *telle que* $f(x) = ax^2+bx+c$ *pour qu'elle admette un extrémum de* 3 *pour* $x = 2$ *et que le point* M(-1; -2) *appartienne au graphique* Γ_f.

28 *Les dimensions d'un rectangle* ABCD *sont* a *et* 2a. *Ses côtés portent respectivement les points* M, N, P, Q *de telle sorte que* $\delta(A,M) = \delta(B,N) = \delta(C,P) = \delta(D,Q) = x$. *Etudier la variation de l'aire du parallélogramme* MNPQ *en fonction de* x.

29 *Etudier la variation de l'aire d'un triangle équilatéral inscrit dans un triangle équilatéral de côté* a *donné.*

30 *Où faut-il couper une ficelle d'un mètre de long pour former, avec une partie, un triangle équilatéral et avec l'autre un carré de telle manière que la somme de leurs aires soit minimale?*

4 Formules de Viète, équations et inéquations

Si $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$, alors on a deux racines x_1 et x_2 et

$$S = x_1+x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \quad \text{(somme des racines)}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \text{(produit des racines)}$$

Ces formules s'appellent "formules de Viète". Elles sont utiles pour connaître le signe des racines d'un trinôme, s'il y en a.

Exercices

31 *Donner le nombre et, si possible, le signe des racines des applications trinômes suivantes.*

1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ 2) $f(x) = -5x^2 + 4x + 3$ 3) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}$

4) $f(x) = 7x^2 + 2x + 1$ 5) $f(x) = 7x^2 - 5x$ 6) $f(x) = -8x^2 + 1$

7) $f(x) = mx^2 + 2x + 1$ 8) $f(x) = 5x^2 - 8x + m$ 9) $f(x) = (m+1)x^2 + x + 3$

10) $f(x) = (m-5)x^2 - 2x + 1$ 11) $f(x) = 3x^2 - mx - 5$ 12) $f(x) = 2x^2 + (m+3)x + 1$

32 *Trouver deux nombres* a *et* b *tels que*

1) $a + b = \frac{22}{3}$ et $ab = \frac{7}{3}$ 2) $a + b = 19$ et $ab = 78$ 3) $a + b = 1$ et $ab = 1$

4) $a + b = -1$ et $ab = 72$ 5) $a + b = \frac{5}{6}$ et $ab = \frac{1}{6}$ 6) $a + b = 18$ et $ab = 20$

33 *Trouver* m *si* f

1) $f(x) = 2x^2 + x + m$ *et* f *admet deux racines de même signe.*

2) $f(x) = 3x^2 + x + 2m$ *et* f *admet une racine double positive.*

3) $f(x) = (3m+1)x^2 + 2x + 1$ *et* f *admet deux racines de signes contraires.*

4) $f(x) = (m+5)x^2 + x + 2$ *et* $f(x) > 0$ *pour tout* x *réel.*

5) $f(x) = (m+1)x^2 + 2x + 1$ *et* f *admet deux racines distinctes négatives.*

6) $f(x) = 2x^2 + mx + 1$ *et* f *admet deux racines distinctes positives.*

7) $f(x) = 5x^2 + 2x - m$ *et* f *admet une racine double négative.*

8) $f(x) = 3x^2 - x + m - 3$ *et* f *admet une racine nulle. Quelle est alors le signe de l'autre racine?*

34 *Déterminer le nombre, le signe et les valeurs relatives des racines de* f *suivant les valeurs du paramètre* m.

1) $f(x) = (m+1)x^2 - mx + 1 - m$. 2) $f(x) = (m-6)x^2 - 4(m-1)x + m - 3$

3) $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m-3)x + 5m - 6$ 4) $f(x) = (m-4)x^2 + 2(m-1)x + 2m - 3$

35 *Résoudre les inéquations selon le modèle suivant.*

$$\frac{3x-1}{2-x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2-x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-3}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } (4x-3)(2-x) \leq 0$$

car le signe du quotient est celui du produit qui est un trinôme. On applique alors le théorème du signe du trinôme et l'on évite ainsi le recours au tableau de signes.

Ainsi, $\frac{3x-1}{2-x} \leq 1 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $(4x-3)(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{3}{4}] \cup]2; +\infty[$.

1) $\frac{2x}{x-1} < 3$ 2) $\frac{7+x}{2x+1} \leq \frac{3}{4}$ 3) $\frac{3}{2-x} > \frac{5}{x+2}$

4) $\frac{2x}{x-5} \geq \frac{3}{x+2}$ 5) $\frac{x}{2+x} > x+1$ 6) $\frac{x^2-4}{(x+1)(x-2)} \geq 0$

7) $\frac{x}{x+3} < \frac{1}{2-x}$ 8) $\frac{5x-1}{3-x} \geq \frac{x}{3}$ 9) $\frac{1}{x+1} - 3 < \frac{4-3x}{x-1}$

36 Résoudre les inéquations irrationnelles selon le modèle suivant.

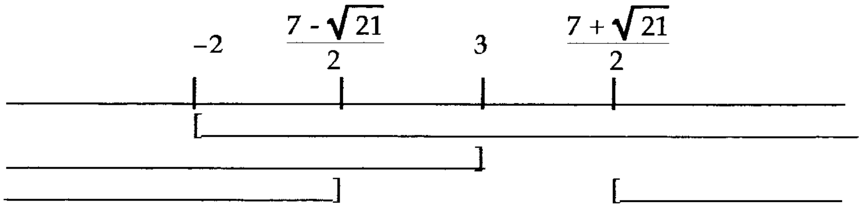
$$\sqrt{x+2}+3 \le -x+6 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} \le -x+3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \ge -2 \text{ et } \begin{cases} x \le 3 \quad \text{et} \quad x+2 \le x^2-6x+9 \quad \text{et} \quad 0 \le x^2-7x+7 \\ \text{ou} \\ x > 3 \text{ et } \left(\sqrt{x+2} \ge 0 \text{ et } -x+3 < 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-28}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \ge -2 \text{ et } \begin{cases} x \le 3 \text{ et } x \in \left]-\infty ; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{21}}{2} ; +\infty\right[\\ \text{ou} \\ x > 3 \qquad \text{et} \quad x \in \varnothing \end{cases}$$

avec le tableau



$$\Leftrightarrow \quad x \in \left[-2 ; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right]$$

1) $\sqrt{x+1} \le \sqrt{x+2}$ 2) $\sqrt{1-2x} \le 3$ 3) $2-\sqrt{x+7} \ge 0$

4) $x+\sqrt{x+3} > 0$ 5) $\sqrt{2+x}-x \ge 3$ 6) $\sqrt{x}-\sqrt{-2-x} < 0$

7) $\sqrt{1+2x}-1 \le -x$ 8) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1} \ge 1$ 9) $\sqrt{x^2-1} > x$

10) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \le 1$ 11) $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \ge 2$ 12) $\sqrt{(x+1)(x-2)}-1 \le x$

13) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x} \le 3$ 14) $\sqrt{x}-\sqrt{x+2} \le \sqrt{x-3}$

37 Résoudre dans **R** *selon l'exemple suivant.*

$$x^4+3x^2-40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = t \text{ et } t^2+3t-40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = t \text{ et } t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = t \text{ et } t \in \{5 ; -8\} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{5}$$

1) $4x^4+12x^2+9 = 0$ 2) $2x^4+5x^2+3 = 0$

3) $x^6-7x^3-8 = 0$ 4) $x^6+35x^3+216 = 0$

5) $x^6-x^4 = 0$ 6) $-x^8+17x^4-16 = 0$

38 Résoudre dans **R**

1) $\sqrt{5x+10} = 8-x$ 2) $\sqrt{169-x^2} = x-17$

3) $\sqrt{x^2+1} - 2x = -1$

4) $\sqrt{x+5} = 2+\sqrt{x-1}$

5) $\sqrt{x-5} = x+\sqrt{x+1}$

6) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} = 2$

39 *Si* $\delta(A,B) = 1$, *comment partager* $[A,B]$ *pour obtenir deux segments sachant que le rapport des longueurs du grand segment relativement au moyen est égal au rapport des longueurs du moyen segment au plus petit? (Nombre d'or)*

40 *Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont l'aire est* 527 *et le périmètre* 96 ?

41 *Trouver l'aire d'un triangle rectangle sachant que la longueur d'un cathète est* 10 *et que l'hypoténuse est deux fois plus longue que l'autre cathète. Qu'obtient-on si l'on pose que l'hypoténuse est* n *fois plus longue que l'autre cathète, avec* $n \in \mathbb{N}^*$?

42 *a) Trouver deux nombres dont la moyenne arithmétique est* 58 *et la moyenne géométrique* 42.

b) Comment choisir deux nombres pour que leur moyenne arithmétique soit leur moyenne géométrique?

43 *Sans calculer les racines* x' *et* x'' *de la fonction* f *déterminer la fonction trinôme* g *qui admet pour racines* $x_1 = 3x'+2$ *et* $x_2 = 3x''+2$, *si* $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

44 *Sans calculer les racines* x' *et* x'' *de la fonction* f *déterminer la fonction trinôme* g *qui admet pour racines* $x_1 = (x')^2$ *et* $x_2 = (x'')^2$, *si* $f(x) = 3x^2 - 2x - 7$.

45 *Sans calculer les racines* x' *et* x'' *de la fonction* f *déterminer la fonction trinôme* g *qui admet pour racines* $x_1 = (x')^2 - 5$ *et* $x_2 = (x'')^2 - 5$, *si* $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$.